TITLE:
河川の分岐について(基研短期研究計画「形の物理学」,研究会報告)

AUTHOR(S):
徳永, 英二; 柏谷, 健二

CITATION:
徳永, 英二 ...[et al]. 河川の分岐について(基研短期研究計画「形の物理学」,研究会報告). 物性研究 1981, 36(1): A32-A40

ISSUE DATE:
1981-04-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/90234

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

河川の分岐について

中央大・経済　徳永英二
京大・防災研　柏谷健二

Ⅰ．まえがき

河川（水路）の分岐は，必然的に河川（水路）および流域にヒエラルキー的性質を付与する。この性質に注目し，水路を数値を用いて等級化し，水路網もしくは流域の構成に関して法則性を追求しようとの研究は，かなり以前から進められている。このような研究は，当初，地形図上における流域要素の計測により，種々の経験法則を導く方向で進められたが，近年，地形学にエントロピーの概念が導入されるに及んで，いくつかの流域モデルも考案され，流域の構成の合法則性もある程度説明されるに至っている。また，流域の構成に関する諸法則とそれらを説明する基本的な考え方は，水路以外の枝分れをする現象にも適用し得る普遍性の高いものといえそうである。

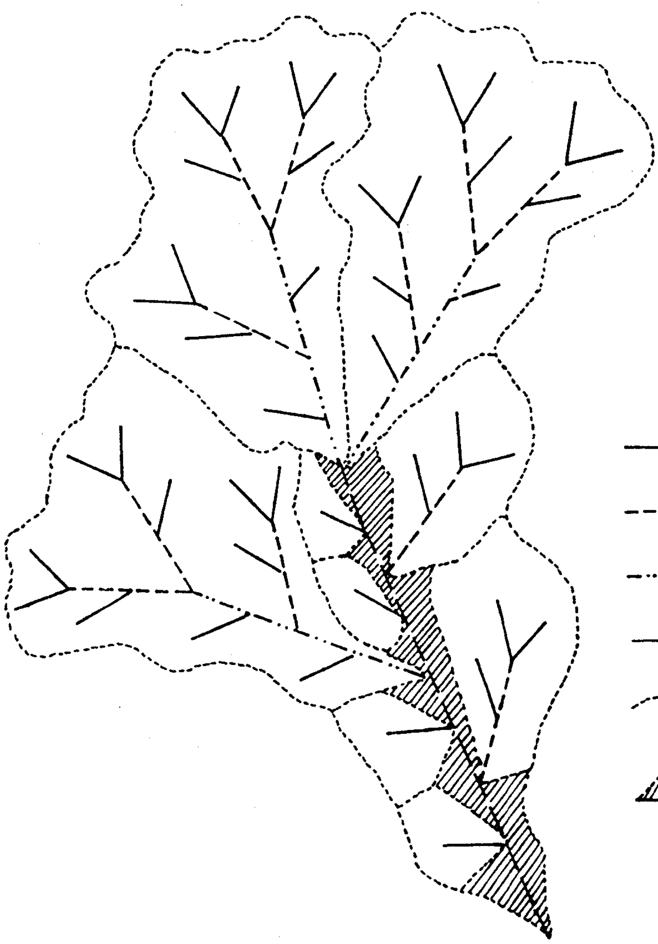
Ⅱ．水路網もしくは流域の構成に関する Horton の諸法則

水路の等級分けについては，様々な方法が提案されているが，今日もっとも普及しているのは，Horton (1945) が提唱し，Strahler (1952)が改良した水路次数である。支流を持たない細流を１次水路，１次水路のみを支流とするものを２次水路と，順次次数づける，第１図において，$l=1$ とすれば，Horton–Strahler の方法で次数づけられた水路網が出来上る。このような作業は，通常，地形図上で等高線が谷地形を示すところに水路を記入することによって作成された水系図に対してなされる。したがって，基本となる地形図の縮尺により，同じ水路でも次数が異なる。徳永は，このことを考慮し，第１図のように最低次数を変数で与えることにしている（徳永，1974, Tokunaga, 1978）.

水路をHorton–Strahlerの方法で次数区分し，さらにある次数の水路を取り巻く流域の次数を水路の次数で与えれば，以下の法則が現実の流域で，概ね成立するとされている。

(i) 水路数の法則（ Horton の第１法則）：ある流域で最高次の水路の次数を n とすると，ある次数(i) の水路の数 (N_i) は，幾何級数で表わされる (Horton, 1945; Strahler, 1952)

$$N_i = R_b^{\,n-i} \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \qquad (\text{Ⅱ}-1)$$



第1図　$\varepsilon_1 = 1$,　$K = 2$ の水路網モデル (Tokunaga, 1978)

式中の R_b は分岐比と呼ばれ，同一流域内では一定と見做される。

(ii) 水路長の法則 (Horton の第2法則)：$\overline{L}_i$ を i 次の水路の平均長，$\overline{L}_1$ を1次の水路の平均長とすると，i と $\overline{L}_i$ との間に次式の関係が成立する (Horton, 1945; Strahler, 1952)

$$\overline{L}_i = \overline{L}_1 R_l^{\,i-1} \qquad (\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n\ ) \qquad (\text{II}-2)$$

R_l は流長比と呼ばれ，同一流域内で一定と見做される。

(iii) 水路勾配の法則 (Horton の第3法則)：$\overline{S}_i$，$\overline{S}_1$ をそれぞれ i 次および1次の水路の平均勾配とすると以下の関係が成立する (Horton, 1945; Morisawa, 1962)

$$\overline{S}_i = \overline{S}_1 R_S^{\,-(i-1)} \qquad (\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n\ ) \qquad (\text{II}-3)$$

R_S は勾配比と呼ばれ，同一流域内で一定と見做される。

(iv) 流域面積の法則 (Horton・Schumm の第4法則)：$\overline{A}_i$，$\overline{A}_1$ をそれぞれ i 次および1次

の流域の面積の平均値とした場合，以下の関係が成立する (Horton, 1945; Schumm, 1956)

$$\overline{A}_i = \overline{A}_1 R_A{}^{i-1} \qquad (\ i = 1, 2, \cdots\cdots, \ n\ ) \qquad (\text{II}-4)$$

R_A は流域面積比と呼ばれ，同一流域内で一定と見做される。

(V) 水路落差の法則：$\overline{Z}_i$，$\overline{Z}_1$ をそれぞれ i 次および1次の水路の落差の平均値とした場合，以下の関係が成立する。

$$\overline{Z}_i = \overline{Z}_1 R_z^{i-1} \qquad (\ i = 1, 2, \ \cdots\cdots, \ n\ ) \qquad (\text{II}-5)$$

R_z は落差比と呼ばれ，同一流域内で一定と見做される。この法則は，水路長の法則と水路勾配の法則から導かれる (Yang, 1971)

III. 水路網の周期性について

以上，五つの法則は，いずれも，水路網および流域がサイクリックに構成されていることを意味する。すなわち，i 次の水路（流域）の（$i+1$）次の水路（流域）に対する関係は，（$i+\eta$）次の水路（流域）の（$i+\eta+1$） 次の水路（流域）に対する関係と同一である。ここで都合の悪いことは，ある水路網とその中に含まれる部分水路網とで，同じ分岐比の値でもって Horton の水路数の法則が成立するような水路網は特殊な水路網であることが判明していることである。そのような水路網では，互いに合流する水路の次数差が1以下である（徳永，1966, ; Scheidegger, 1968）。このような水路網は，現実の流域でもごくまれであり，後述するランダムな水路網の平均的分岐状態とも異なる，ところで，水路網（流域）がサイクリックに構成されるという条件を満足する分岐様式は，（II－1）式で表わされるもの以外にも考えられる。その一つは，以下のようなパラメータを導入することによって得られる。

すなわち，${}_\kappa\varepsilon_\lambda$ を κ 次の水路1本に直接側方より流入する水路の数（流域全体での平均値）とする。${}_\kappa\varepsilon_\lambda$ に対し以下のような関係が成立するものとする（第1図の流域では $\varepsilon_1 = 1$，$K = 2$ である）。

$$
\begin{aligned}
&{}_m\varepsilon_{m-1} = {}_{m-1}\varepsilon_{m-2} = \cdots\cdots = {}_\kappa\varepsilon_{\kappa-1} = \cdots\cdots = {}_{l+1}\varepsilon_l = \varepsilon_1 \\
&{}_m\varepsilon_{m-2} = {}_{m-1}\varepsilon_{m-3} = \cdots\cdots = {}_\kappa\varepsilon_{\kappa-2} = \cdots\cdots = {}_{l+2}\varepsilon_l = \varepsilon_2 \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{III}-1) \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$_{m}\varepsilon_{m-\xi} = {}_{m-1}\varepsilon_{m-1-\xi} = \cdots\cdots = {}_{\kappa}\varepsilon_{\kappa-\xi} = \cdots\cdots = {}_{l+\xi}\varepsilon_{l} = \varepsilon_{\xi}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon_{\xi-1}} = K \qquad (\text{III}-2)$$

ただし，与えられた縮尺の地形図で，mを最高次数，lを最低次数とする。ここで，${}_{\kappa}\mu_{\lambda}$をκ次の流域内のλ次の水路の数（同じく平均値）とすれば，以下の式を導くことができる。

$$_{\kappa}\mu_{\lambda} = 2\,{}_{\kappa}\mu_{\lambda+1} + \sum_{\eta=\lambda+1}^{\kappa} \varepsilon_1 K^{\eta-\lambda-1}\,{}_{\kappa}\mu_{\eta} \qquad (\text{III}-3)$$

$$_{\kappa}\mu_{\lambda+1} = 2\,{}_{\kappa}\mu_{\lambda+2} + \sum_{\eta=\lambda+2}^{\kappa} \varepsilon_1 K^{\eta-\lambda-2}\,{}_{\kappa}\mu_{\eta} \qquad (\text{III}-4)$$

（III－3）－K×（III－4）は

$$_{\kappa}\mu_{\lambda} = (2+\varepsilon_1+K)\,{}_{\kappa}\mu_{\lambda+1} - 2K\,{}_{\kappa}\mu_{\lambda+2} \qquad (\text{III}-5)$$

となる。この漸化式は，${}_{\kappa}\mu_{\lambda}$の ${}_{\kappa}\mu_{\lambda+1}$ 対する比が連分数の関係にあることを示すものである。ここで，$P=[2+\varepsilon_1+K-\sqrt{(2+\varepsilon_1+K)^2-8K}]/2$，$Q=[2+\varepsilon_1+K+\sqrt{(2+\varepsilon_1+K)^2-8K}]/2$ とおくと，${}_{\kappa}\mu_{\lambda}$ を次式で表わすことが出来る（徳永，1974；Tokunaga, 1978).

$$_{\kappa}\mu_{\lambda} = \frac{Q^{\kappa-\lambda-1}-P^{\kappa-\lambda-1}}{Q-P}Q(2+\varepsilon_1-P) + P^{\kappa-\lambda-1}(2+\varepsilon_1) \qquad (\text{III}-6)$$

（III－6）式において（$\kappa-\lambda$）→∞とすると，

$$_{\kappa}\mu_{\lambda} = Q^{\kappa-\lambda}\,\frac{2+\varepsilon_1-P}{Q-P} \qquad (\text{III}-7)$$

となる。このような場合，分岐比はQとなる。

このモデルにおいて，A_λをλ次の流域の面積の平均値，$\beta_{\lambda\cdot l}$を，最低次数をlとした場合，λ次の水路に接する流域間末端面 (interbasin area) の面積の平均値とすれば（第1図参照），次式が導ける。

$$A_\lambda = 2A_{\lambda-1} + \sum_{\eta=l}^{\lambda-1} \varepsilon_1 K^{\lambda-\eta-1} A_\eta + \left[2+\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1 K(K^{\lambda-l-1}-1)}{K-1}\right]\beta_{\lambda\cdot l} \qquad (\text{III}-8)$$

ところで，より大きな縮尺の地形図では，流域間末端面 (interbasin area) の中にも，（Ⅲ－1）式，（Ⅲ－2) 式で表わされるサイクルにしたがって，より低次な流域が次々と現れるはずである。このようなサイクルが，流域面積が無限小になるまで連続すると仮定した上，さらに，(1) 流域間末端面 (interbasin area) の面積の平均値は常に最低次の流域の面積の平均値より小さい，(2)（$2+\varepsilon_1$）$>K$ という二つ条件が満たされると，流域面積の法則を次式で表わすことが出来る（徳永， 1975 ; Tokunaga, 1978)

$$A_\lambda = Q^{\lambda-l}A_l \qquad (\text{Ⅲ}-9)$$

ただし，A_l は与えられた縮尺の地形図で最低次の流域の面積の平均値とする。さらに，λ 次の水路の平均長（L_λ) と A_λ との間に

$$L_\lambda = c\sqrt{A_\lambda}$$

なる関係が成り立つとすれば（c は同一流域内で一定），この関係と（Ⅲ－9) 式より，水路長の法則を表わす式，

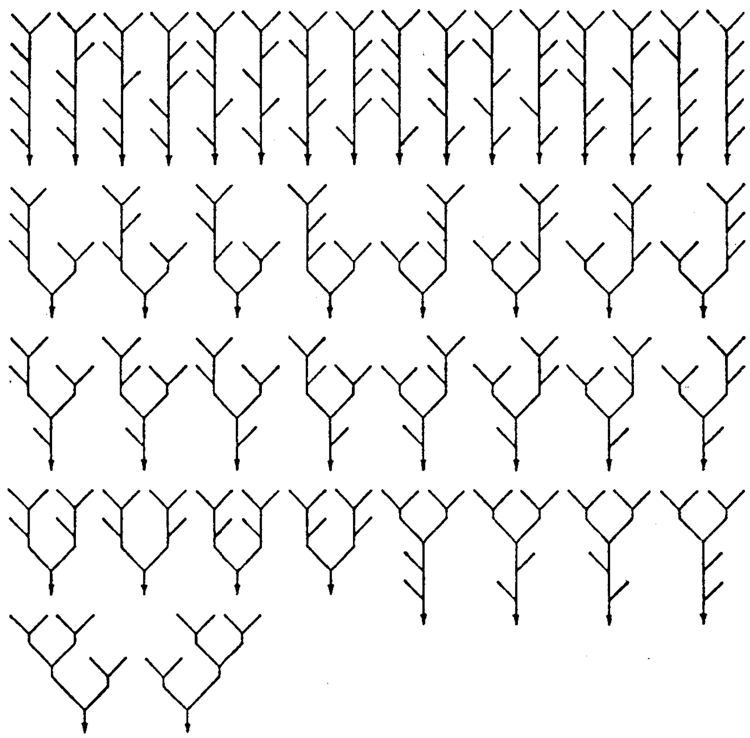
$$L_\lambda = L_l Q^{(\lambda-l)/2} \qquad (\text{Ⅲ}-10)$$

を導くことが出来る。ただし，L_l は与えられ縮尺の地形図で最低次の水路の平均長とする。

以上のように，平面に投影された流域の構成に関する諸法則は，すべて互に結びついており，しかも，すべてサイクリックなシステムの条件を満足している。しかもこのような関係は，Horton の水路数の法則を（Ⅲ－6）式で修正することによって得られるのである。

Ⅳ. ランダムグラフモデル

水路網もしくは流域の構成においても，エントロピー増大の原理が適用されるとすれば，ランダムに合流が行われた場合，構成状態を表わすパラメータがどのような値をとるかということが問題となる。当初は，グリッド上に酔歩を行わせて水路を描き，ランダムに形成される水路網の平均状態がどのようなものであるかということを推定しようとの研究がなされた (Leopold and Langbein, 1962) しかし，このような方法では最低次の水路の数などを任意に与えることが出来ない。そこで別のタイプのモデルが提案された (Shreve, 1966) それは，水路網の位相がランダムである。いいかえれば，任意の数の最低次の水路に対し，すべての可能な形態は，その集合の中で等しく生じるとの仮定に基づいている。例えば，最低次の水路の数が6の場合，位相的に異なる水路網は第2図に示されるとおりである。このような水路網が等し



第２図　最低次の水路の数を６とした場合の位相的に異なる水路網 (Shreve, 1966)

い確率で生じる場合，それは位相的にランダムであるという。

このようなモデルで，最低次の水路の数を無限大にしたとき，すべての位相的に異なる水路網という集合での ε_1 および K の平均値が，それぞれ１および２であることは証明されている（徳永，1974； Tokunaga, 1978）したがって，第１図に示す水路網は，位相的にランダムな無限大の水路網の平均状態のある次数差間をとり出したものといえよう。このような水路網によってつくられる流域を理想流域と呼ぶことが出来る（徳永，1975)。このような水路網もしくは流域の構成に関する諸法則は，（Ⅲ－6）式，（Ⅲ－9）式，（Ⅲ－10）式に $\varepsilon_1=1$, $K=2$, したがって，$P=1$, $Q=4$ を代入することによって得られる。

Ⅴ．水路落差の法則について

以上，平面に投影された流域の構成に関するかぎり，水路数の法則以外は，Horton の経験則が，ランダムグラフモデルを含めて成り立つことを述べてきた。ところで，水路数の法則が（Ⅲ－6）式で表わされるとした場合，（Ⅲ－7）式は，高次な流域内の比較的低次な水路に関しては，水路数の比が一定の関係が近似的に成り立つことを示している。このことは，そのよう

な水路に関しては，最低次の方から順次水路数の比をとれば，Hortonの水路数の法則が近似的に成り立つことを意味する。そこで本章では，水路数の法則，流域面積の法則，そして水路落差の法則との関係について検討を加える。

今，ある流域で，Hortonの水路数の法則が成立すると見做される範囲からの全流出量がその面積に比例するとすれば，i 次水路におけるポテンシャル・エネルギー消費 u_i は

$$u_i = C_i N_i \overline{q}_i \overline{Y}_i = C_i' N_i \overline{A}_i \overline{Y}_i \qquad (\text{V}-1)$$

で表現される。ただし，C_i，C_i' はいわば“エネルギー効率”，$\overline{q}_i$ は i 次流域からの平均流出量，$\overline{Y}_i$ は i 次流域の平均起伏量とする。 ある流域で η 次の水路までHortonの水路数の法則が成立すると見做せば，その範囲での全ポテンシャル・エネルギー消費 U は $U=\sum_{i=1}^{\eta} u_i$ であると考えられる。平衡状態における i 次水路のポテンシャル・エネルギー消費 u_i^* は

$$u_i^* = U/\eta \qquad (\text{V}-2)$$

で表現されるから (Kashiwaya, 1980)， $\overline{Y}_i = r\overline{Z}_i$ （r は一定）とすれば，（V－1）式は

$$u_i = C_i'' N_i \overline{A}_i \overline{Z}_i \qquad (\text{V}-3)$$

となる。ただし，$C_i'' = C_i' r$． ここで， C_i'' が次数によらず一定であるとすれば， $C_i'' = C''$ として，

$$U = C'' \sum_{i=1}^{\eta} N_i \overline{A}_i \overline{Z}_i \qquad (\text{V}-4)$$

となる （II－1）式，（II－4）式，（II－5）式を上式に代入することにより，

$$U = C'' \overline{A}_1 \overline{Z}_1 R_b^{\eta-1} \sum_{i=1}^{\eta} (R_A R_z/R_b)^{i-1} \qquad (\text{V}-5)$$

を得る。したがって，平衡状態における i 次水路の平均落差 $\overline{Z}_i^*$ を，（V－2）式，（V－3）式，（V－5）式を用いて計算すれば，

$$\begin{aligned}\overline{Z}_i^* &= u_i^* / (C'' N_i \overline{A}_i) \\ &= \overline{Z}_1/\eta \cdot (R_b/R_A)^{i-1} \sum_{i=1}^{\eta} (R_A R_z/R_b)^{i-1} \qquad (\text{V}-6)\end{aligned}$$

となる。今， $\overline{Z}_1/\eta \cdot \sum_{i=1}^{\eta} (R_A R_z/R_b)^{i-1}$ を $\overline{Z}_1^*$ とし， R_b/R_A を R_z^* とすれば，（V－6）式は

$$\overline{Z}_i^* = \overline{Z}_1^* R_z^{*\,i-1} \tag{V-7}$$

となる。この式は η 次以下の流域の占める部分が平衡状態にある場合の落差則を示しており，平衡落差則ともいうべきものである。このような部分に対する分岐比は，(Ⅲ－7) 式によりQで与えられる。また，(Ⅲ－9) 式より，$R_A = Q$ であるから

$$R_z^* = R_b / R_A = 1$$

となり，Yang (1971) のいう等落差則 ($\overline{Z}_1^* = \overline{Z}_2^* = \cdots\cdots\cdots\cdots = Z_\eta^*$) も成立することになる。この関係と流長の法則を結びつけることにより，河川の平均的な平衡縦断形を描くことが出来る (Kashiwaya, 1980)

Ⅵ．あとがき

本論では，主に，水路網および流域の周期性という仮定とそれより導かれる諸法則について説明した。そのため，ランダムグラフモデルに対する説明は不充分なものに終ってしまった。また，周期性に関係する問題でも，流域の相対成長などは，説明が長くなるゆえ，割愛せざるを得なかった。しかしながら，本論に述べられたことだけでも，河川の枝分れとそれに伴う流域の構成が合法則的になされていること，さらに，このような議論をつきつめると，流域の形を考えざるを得なくなることなどは理解されよう。最後に，流域にかぎらず，地形学の対象は，多くの分野の人々に討論の場を提供していることを付け加えておく。そのような情報を得るための手近な本として次の二冊を掲げる。

1. 奥田節夫監訳，A•E•シャイデッガー著，「理論地形学」，古今書院
2. 高山茂美著，「河川地形」，共立出版

文　　献

徳永英二 (1966)：豊平川の排水網構成とHortonの第1法則の検討。北大地物研究報告，15号，1～19.

徳永英二 (1974)：組合せ理論による水路数の法則の考察。地理学評論，47，696～708.

徳永英二 (1975)：流域の構成に関する法則の考察，地理学評論，48，351～364.

Horton, R. E. (1945): Erosinal development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology, Bull. Geol. Soc. Am., **56**, 275–370.

Kashiwaya, K (1980): Comments on the law of average streatm fall, 地形 **1**, 23–33.
Leopold, L. B. and Langbein, W. B. (1962): The concept of entropy in landscape evolution, U. S. Geol. Surv. Profess. Paper, **500–A**, 1–20.
Morisawa, M. E. (1962): Quantitative geomorphology of some watersheds in the Appalachian Plateau, Bull. Geol. Soc. Am., **73**, 1025–1046.
Scheidegger, A. E. (1968): Horton's law of stream numbers, water Resour. Res., **4**, 655–658.
Schumm, S. A. (1956): Evolution of drainage systems and slopes in badlands at Perth Amboy, N. J., Bull. Geol. Soc. Am., **67**, 597–646.
Shreve, R. L. (1966): Statistical law of stream numbers, Jour. Geol., **74**, 17–37.
Strahler, A. N. (1952): Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography, Bull. Geol. Soc. Am., **63**, 1117–1142.
Tokunaga, E. (1978): Consideration on the composition of drainage networks and their evolution, Geog, Rep. Tokyo Metrop. Univ., **13**. 1–27.
Yang, C. T. (1971): Potential energy and stream morphology, Water Resour. Res., **7**, 311–322.

血管の分岐の形態とその構築

東京医歯大・医用器材研　戸 川 達 男

生物の形態には，合目的性すなわち自然環境において生きるのに適した性質が認められることは明らかなことであるが，実際の生物の形態がどれだけ正確に合目的性を実現しているかを定量的に評価した例は少ない。そのうちで，血管系の形態および樹木の形態については古くからの研究があり，形態と機能の定量的な関係が示されている点で興味ある例である。

1. 血管分岐の法則性を説明するモデル

毛細管と毛細管に流れる血流を調節する細動脈を除けば，大部分の血管は血液を流す導管であり，その形態は血液を効率良く流すことができるように構築されていると考えられる。ここで「効率」という概念は完全に説明されているわけではなく，生物にとって有利なことあるい